

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ВЛАДИМИРА ДАЛЯ»**

**Институт технологий и инженерной механики
Кафедра физики**

УТВЕРЖДАЮ

Директор института технологий и
инженерной механики

«» Могильная Е.П.
2023 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

«МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»

По направлению подготовки 03.03.02 Физика
Профиль подготовки «Физика»

Луганск 2023

Лист согласования РПУД

Рабочая программа учебной дисциплины «Методы математической физики» по направлению подготовки 03.03.02 Физика. – 26 с.

Рабочая программа учебной дисциплины «Методы математической физики» составлена с учетом Федерального Государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 03.03.02 Физика, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от «07» августа 2020 года №891.

СОСТАВИТЕЛЬ:

кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры физики Лыштва Е.Ю.

Рабочая программа дисциплины утверждена на заседании кафедры физики
«18» 04 2023 г., протокол № 9

Заведующий кафедрой физики Корсунов К.А.

Переутверждена: « » 20 г., протокол №

Директор института технологий и инженерной механики Могильная Е.П.

Рекомендована на заседании учебно-методической комиссии института технологий и инженерной механики

«18» 04 2023 г., протокол № 3

Председатель учебно-методической комиссии
института технологий и инженерной механики Ясуник С.Н.

Структура и содержание дисциплины

1. Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе

Цель изучения дисциплины «Методы математической физики» – подготовить студентов к использованию математической физики для создания и анализа наглядных математических моделей применительно к задачам, связанным с профессиональной деятельностью, использованию понятий и методов математической физики с учетом специфики описываемых математических моделей.

Задачи изучения дисциплины «Методы математической физики»:

сформировать у студентов необходимые знания основных понятий и методов математической физики; основных принципов построения математических моделей средствами методов математической физики для описания различных физических процессов;

научить оперировать основными понятиями методов математической физики;

с помощью методов математической физики научить вычислять различные числовые характеристики; строить математические модели, которые позволяют анализировать, прогнозировать и оптимизировать исследуемые процессы;

развивать навыки использования современных вычислительных средств для решения научных и прикладных задач.

2. Место дисциплины в структуре ООП ВО

Дисциплина «Методы математической физики» входит в модуль естественных дисциплин обязательной части учебного плана подготовки студентов по направлению подготовки 03.03.02 Физика.

Содержание дисциплины является логическим продолжением дисциплин: «Алгебра и геометрия», «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения» и служит основой для освоения дисциплин: «Квантовая теория», «Электродинамика», «Термодинамика. Статистическая физика. Физическая кинетика».

3. Требования к результатам освоения содержания дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижений компетенции (по реализуемой дисциплине)	Перечень планируемых результатов
ОПК-1. Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности	ОПК-1.1. Обладает базовыми знаниями в области физико-математических и (или) естественных наук ОПК-1.2. Применяет базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук для решения задач профессиональной деятельности	Знать: основные положения методов математической физики; области их применения; классификацию уравнений в частных производных второго порядка. Уметь: определять возможности применения теоретических положений и методов математической физики для постановки и решения конкретных прикладных задач. Владеть навыками: применения методов математической физики к решению прикладных задач; математической формализации прикладных задач, анализа и

		интерпретации решений соответствующих математических моделей.
ПК-1. Способен проводить научные исследования в избранной области экспериментальных и (или) теоретических физических исследований с помощью современной приборной базы (в том числе сложного физического оборудования) и информационных технологий с учетом отечественного и зарубежного опыта	ПК-1.1. Знает теоретические основы физических методов исследования и методы анализа свойств физических систем разного уровня организации. ПК-1.2. Знает методы экспериментальных исследований в физике, возможности и области использования аппаратуры и оборудования для выполнения физических исследований. ПК-1.3. Умеет: осуществлять выбор оборудования и методик для решения конкретных задач, эксплуатировать современную физическую аппаратуру и оборудование. ПК-1.4. Владеет навыками использования современных методов исследования в выбранной области.	Знать: вид базовых уравнений всех типов и их аналитических решений, а также физическую интерпретацию этих решений, физические законы, на которых базируется вывод конкретных уравнений; Уметь: строить математические модели различных стационарных и нестационарных физических процессов, протекающих в ограниченной среде и неограниченной среде на плоскости и в пространстве; описывать и анализировать процессы с помощью аппарата уравнений математической физики, давать полученным математическим результатам соответствующую интерпретацию; проводить оценку качества полученных решений прикладных задач. Владеть: навыками исследования математических моделей физических явлений, являющихся краевыми задачами для линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, математическими методами обработки и анализа информации в области основных разделов физики.

4. Структура и содержание дисциплины

4.1. Объем учебной дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Объем часов (зач. ед.)			
	Очная форма			Заочная форма
	5 сем.	6 сем.	всего	
Общая учебная нагрузка (всего)	144 (4 зач. ед)	108 (3 зач. ед)	252 (7 зач.ед)	Не предусмотрена
Обязательная аудиторная учебная нагрузка (всего) в том числе:	68	68	136	-
Лекции	34	34	68	-
Семинарские занятия	-	-	-	-
Практические занятия	34	34	68	-
Лабораторные работы	-	-	-	-
Курсовая работа (курсовой проект)	-	-	-	-
Другие формы и методы организации образовательного процесса (<i>расчетно-графические работы, групповые дискуссии, ролевые игры, тренинг, компьютерные симуляции, интерактивные лекции, семинары, анализ деловых ситуаций и т.п.</i>)-	-	-	-	-
Самостоятельная работа студента / форма контактной работы	58 / 18	4 / 36	62 / 54	-
Форма аттестации	зачет	экзамен		

4.2. Содержание разделов дисциплины

Семестр 5

Тема 1. Векторная алгебра.

Понятие вектора. Сумма и разность векторов. Скалярное произведение и его свойства. Векторное произведение и его свойства. Смешанное и двойное произведение трех векторов.

Тема 2. Векторный анализ.

Градиент. Дивергенция. Ротор. Оператор набла. Последовательное применение оператора набла. Интегрирование векторов. Линейные, поверхностные и объемные интегралы. Теорема Гаусса. Теорема Стокса. Связь дифференциальных и интегральных операций векторного анализа. Теория потенциала.

Тема 3. Системы координат.

Криволинейные координаты. Коэффициенты Ламе. Элементы длины, поверхности и объема в криволинейных координатах. Дифференциальные векторные операторы в криволинейных координатах. Специальные системы координат: декартовы координаты, цилиндрические координаты, сферические координаты. Коэффициенты Ламе для них. Запись дифференциальных векторных операторов в этих системах координат.

Тема 4. Диффузионные задачи.

Классификация уравнений. Параболические уравнения. Граничные условия. Уравнение теплопроводности. Разделение переменных. Преобразование неоднородных граничных условий в однородные. Преобразование сложных уравнений к простому виду. Решение неоднородных УЧП методом разложения по собственным функциям.

Тема 5. Решение УЧП методом интегральных преобразований.

Интегральные преобразования (синус- и косинус-преобразования). Ряды и преобразование Фурье. Решение УЧП с помощью преобразования Фурье. Преобразование Лапласа и его свойства. Решение УЧП с помощью преобразования Лапласа. Принцип Дюамеля.

Семестр 6

Тема 6. Гиперболические задачи.

Одномерное волновое уравнение. Формула Даламбера. Граничные условия. Колебания ограниченной струны. Переход к безразмерным переменным. Каноническая форма гиперболического уравнения. Волновое уравнение в свободном пространстве (двумерные и трехмерные задачи). Колебания мембраны (волновое уравнение в полярных координатах).

Тема 7. УЧП первого порядка.

Конечные преобразования Фурье. Принцип суперпозиции – основа теории линейных систем. Метод характеристик. Нелинейные уравнения первого порядка (законы сохранения). Системы уравнений с частными производными.

Тема 8. Эллиптические задачи.

Лапласиан и его физический смысл. Общие свойства краевых задач. Внутренняя задача Дирихле. Задача Дирихле в кольце. Уравнение Лапласа в сферических координатах (сферические гармоники). Неоднородная задача Дирихле. Функция Грина.

Тема 9. Численные и приближенные методы.

Численное решение эллиптических задач. Явные разностные схемы. Неявные разностные схемы. Метод Монте-Карло. Решение УЧП методом Монте-Карло. Вариационное исчисление (уравнения Эйлера-Лагранжа). Вариационные методы решения УЧП. Решение УЧП методами теории возмущений. Решение УЧП методом конформных преобразований.

4.3. Лекции

№ п/п	Название темы	Объем часов	
		Очная форма	Заочная форма
Семестр 5			
1	Векторная алгебра	4	-
2	Векторный анализ	6	-
3	Системы координат	8	-
4	Диффузионные задачи	8	-
5	Решение УЧП методом интегральных преобразований	8	-
Итого		34	
Семестр 6			
6	Гиперболические задачи	8	-
7	УЧП первого порядка	8	-
8	Эллиптические задачи	8	-
9	Численные и приближенные методы	10	-
Итого		34	
Итого за курс:		68	-

4.4. Практические занятия

№ п/п	Название темы	Объем часов	
		Очная форма	Заочная форма
Семестр 5			
1	Векторная алгебра	4	-
2	Векторный анализ	6	-
3	Системы координат	8	-
4	Диффузионные задачи	8	-
5	Решение УЧП методом интегральных преобразований	8	-
Итого		34	
Семестр 6			
6	Гиперболические задачи	8	-
7	УЧП первого порядка	8	-
8	Эллиптические задачи	8	-
9	Численные и приближенные методы	10	-
Итого		34	
Итого за курс:		68	-

4.5. Лабораторные работы по дисциплине «Методы математической физики» не предполагаются учебным планом.

4.6. Самостоятельная работа студентов

№ п/п	Название темы	Вид СРС	Объем часов	
			Очная	Заочная

			форма	форма
<i>Семестр 5</i>				
1	Векторная алгебра	Изучение дополнительной литературы по данной теме. Выполнение домашнего задания	10	
2	Векторный анализ	Изучение дополнительной литературы по данной теме. Выполнение домашнего задания	12	
3	Системы координат	Изучение дополнительной литературы по данной теме. Выполнение домашнего задания	12	
4	Диффузионные задачи	Изучение дополнительной литературы по данной теме. Выполнение домашнего задания	12	
5	Решение УЧП методом интегральных преобразований	Изучение дополнительной литературы по данной теме. Выполнение домашнего задания	12	
Итого			58	
<i>Семестр 6</i>				
6	Гиперболические задачи	Изучение дополнительной литературы по данной теме. Выполнение домашнего задания	1	
7	УЧП первого порядка	Изучение дополнительной литературы по данной теме. Выполнение домашнего задания	1	
8	Эллиптические задачи	Изучение дополнительной литературы по данной теме. Выполнение домашнего задания	1	
9	Численные и приближенные методы	Изучение дополнительной литературы по данной теме. Выполнение домашнего задания	1	
Итого			4	
Итого за курс:			62	

4.7. Курсовые работы по дисциплине «Методы математической физики» не предполагаются учебным планом.

5. Образовательные технологии

Преподавание дисциплины ведется с применением следующих видов образовательных технологий: объяснительно-иллюстративного обучения (технология поддерживающего обучения, технология проведения учебной дискуссии), информационных технологий (презентационные материалы), развивающих и инновационных образовательных технологий.

Практические занятия проводятся с использованием развивающих, проблемных, проектных, информационных (использование электронных образовательных ресурсов (электронный конспект) образовательных технологий.

6. Учебно-методическое и программно-информационное обеспечение дисциплины:

а) основная литература:

1. Глимм, Дж. Математические методы квантовой физики. Подход с использованием функциональных интегралов: моногр. / Дж. Глимм, А. Джаффе. – М.: Мир, 2005. – 448 с.
2. Барашков, В.А. Методы математической физики: Учебное пособие / В.А. Барашков. – М.: Инфра – М, 2018. – 480 с.
3. Горюнов, А.Ф. Методы математической физики в примерах и задачах в 2 т. Т.1. / А.Ф. Горюнов. – М.: Физматлит, 2017. – 872 с.
4. Горюнов, А.Ф. Методы математической физики в примерах и задачах в 2 т. Т.2. / А.Ф. Горюнов. – М.: Физматлит, 2018. – 772 с.

б) дополнительная литература:

1. Арфкен Г. Математические методы в физике. – М.: Атомиздат, 1970. – 712 с.
2. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. – М.: Мир, 1985. – 384 с.
3. Несис Е.И. Методы математической физики. – М.: Просвещение, 1977. – 199 с.
4. Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Задачи по математической физике. – М.: Изд-во МГУ, 1998. – 350 с.
5. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы математической физики. Среда из невзаимодействующих частиц. – М.: Наука, 1973. – 351 с.
6. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики. – М.: Наука, 1972. – 592 с.
7. Пикулин В.П., Похожаев С.И. Практический курс по уравнениям математической физики – М.: МЦНМО, 2004. – 208 с.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: «Наука», 1972.
9. Дж. Мэтьюз, Д. Уокер. Математические методы в физике. – М.: Атомиздат, 1972.

в) методические указания:

1. Конспект лекций по дисциплине «Методы математической физики» (для студентов, обучающихся по направлению подготовки 03.03.02 «Физика» (в 4-х частях). Часть 1. «Векторная алгебра. Теория поля» / Сост.: Г.С. Калюжный, А.В. Чаленко – Луганск: Изд-во ЛНУ им. В. Даля, 2017. – 32 с.
2. Конспект лекций по дисциплине «Методы математической физики» (для студентов, обучающихся по направлению подготовки 03.03.02 «Физика» (в 4-х частях). Часть 2. «Уравнения с частными производными: диффузионные задачи» / Сост.: Г.С. Калюжный, А.В. Чаленко – Луганск: Изд-во ЛНУ им. В. Даля, 2017. – 32 с.
3. Конспект лекций по дисциплине «Методы математической физики» (для студентов, обучающихся по направлению подготовки «Физика» (в 4-х частях). Часть 3 «Гиперболические и эллиптические задачи» / Сост.: Е.Ю. Лыштван, Е.И. Харченко – Луганск: – ГОУ ВО ЛНР «ЛГУ им. В. Даля», 2021. – 71 с.

4. Конспект лекций по дисциплине «Методы математической физики» (для студентов, обучающихся по направлению подготовки 03.03.02 Физика (в 4-х частях), часть 4 «Численные методы» / Сост.: Е.И. Харченко, Е.Ю. Лыштва. – Луганск: Изд-во ЛГУ им. В. Даля, 2022. – 67 с.

5. Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Методы математической физики» (для студентов, обучающихся по направлению подготовки «Физика» (в 4-х частях). Часть 1 «Векторная алгебра. Теория поля» / Сост.: Е.И. Харченко, Е.Ю. Лыштва. – Луганск: – ГОУ ВО ЛНР «ЛГУ им. В. Даля», 2021. – 41 с.

6. Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Методы математической физики» (для студентов, обучающихся по направлению подготовки «Физика» (в 4-х частях). Часть 2 «Диффузионные задачи» / Сост.: Е.И. Харченко, Е.Ю. Лыштва. – Луганск: – ГОУ ВО ЛНР «ЛГУ им. В. Даля», 2021. – 41 с.

7. Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Методы математической физики» (для студентов, обучающихся по направлению подготовки «Физика» (в 4-х частях). Часть 3 «Гиперболические и эллиптические задачи» / Сост.: Е.И. Харченко, Е.Ю. Лыштва. – Луганск: – ГОУ ВО ЛНР «ЛГУ им. В. Даля», 2021. – 73 с.

8. Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Методы математической физики» (для студентов, обучающихся по направлению подготовки 03.03.02 «Физика» (в 4-х частях). Часть 4 «Численные методы» / Сост.: Е.Ю. Лыштва, Е.И. Харченко. – Луганск: Изд-во ЛГУ им. В. Даля, 2022. – 39 с.

9. Методические указания к самостоятельной работе по дисциплине «Методы математической физики» (в 2-х частях), часть 1 «Векторная алгебра. Теория поля. Диффузионные задачи» (для студентов, обучающихся по направлению подготовки 03.03.02 Физика) / Сост.: Лыштва Е.Ю., Харченко Е.И. – Луганск: Изд-во ЛГУ им. В. Даля, 2023. – 45 с.

г) Интернет-ресурсы:

- Министерство образования и науки Российской Федерации – <http://минобрнауки.рф/>
- Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки – <http://obrnadzor.gov.ru/>
- Министерство образования и науки Луганской Народной Республики – <https://minobr.su>
- Народный совет Луганской Народной Республики – <https://nslnr.su>
- Портал Федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования – <http://fgosvo.ru>
- Федеральный портал «Российское образование» – <http://www.edu.ru/>
- Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» – <http://window.edu.ru/>
- Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов – <http://fcior.edu.ru/>

Электронные библиотечные системы и ресурсы

- Электронно-библиотечная система «Консультант студента» – <http://www.studentlibrary.ru/cgi-bin/mb4x>
- Электронно-библиотечная система «StudMed.ru» – <https://www.studmed.ru>
- Электронный каталог Научно-технической библиотеки ЮРГПУ (НПИ) – <https://libweb.srspu.ru/MegaProWeb/Web>
- Образовательная платформа Юрайт – <https://urait.ru/register>
- Научная электронная библиотека eLibrary – <https://www.elibrary.ru/defaultx.asp>

Информационный ресурс библиотеки образовательной организации

- Научная библиотека имени А. Н. Коняева – <http://biblio.dahluniver.ru/>

7. Материально-техническое и программное обеспечение дисциплины

Освоение дисциплины «Методы математической физики» предполагает использование академических аудиторий, соответствующих действующим санитарным и противопожарным правилам и нормам.

Прочее: рабочее место преподавателя, оснащенное компьютером с доступом в Интернет.

Программное обеспечение:

Функциональное назначение	Бесплатное программное обеспечение	Ссылки
Офисный пакет	Libre Office 6.3.1	https://www.libreoffice.org/ https://ru.wikipedia.org/wiki/LibreOffice
Операционная система	UBUNTU 19.04	https://ubuntu.com/ https://ru.wikipedia.org/wiki/Ubuntu
Браузер	Firefox Mozilla	http://www.mozilla.org/ru/firefox/fx
Браузер	Opera	http://www.opera.com
Почтовый клиент	Mozilla Thunderbird	http://www.mozilla.org/ru/thunderbird
Файл-менеджер	Far Manager	http://www.farmanager.com/download.php
Архиватор	7Zip	http://www.7-zip.org/
Графический редактор	GIMP (GNU Image Manipulation Program)	http://www.gimp.org/ http://gimp.ru/viewpage.php?page_id=8 http://ru.wikipedia.org/wiki/GIMP
Редактор PDF	PDFCreator	http://www.pdfforge.org/pdfcreator
Аудиоплеер	VLC	http://www.videolan.org/vlc/

8. Оценочные средства по дисциплине «Методы математической физики»

Паспорт оценочных средств по учебной дисциплине «Методы математической физики»

Перечень компетенций (элементов компетенций), формируемых в результате освоения учебной дисциплины (модуля) или практики

№ п/п	Код контролируемой компетенции	Формулировка контролируемой компетенции	Индикаторы достижений компетенции (по реализуемой дисциплине)	Контролируемые темы учебной дисциплины, практики	Этапы формирования (семестр изучения)
1	ОПК-1	Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности	ОПК-1.1, ОПК-1.2	Тема 1. Векторная алгебра	5
				Тема 2. Векторный анализ	5
				Тема 3. Системы координат	5
				Тема 4. Диффузионные задачи	5
				Тема 5. Решение УЧП методом интегральных преобразований	5
				Тема 6. Гиперболические задачи	6
				Тема 7. УЧП первого порядка	6
				Тема 8. Эллиптические задачи.	6
				Тема 9. Численные и приближенные методы.	6
2	ПК-1	Способен проводить научные исследования в избранной области экспериментальных и (или) теоретических физических исследований с помощью современной приборной базы (в том числе	ПК-1.1, ПК-1.2, ПК-1.3, ПК-1.4	Темы 1-5	5
				Темы 6-9	6

		сложного физического оборудования) и информационных технологий с учетом отечественного и зарубежного опыта			
--	--	--	--	--	--

Показатели и критерии оценивания компетенций, описание шкал оценивания

№ п/п	Код контролируемой компетенции	Перечень планируемых результатов	Контролируемые темы учебной дисциплины	Наименование оценочного средства
1.	ОПК-1 ОПК-1.1 ОПК-1.2	Знать: основные положения методов математической физики; области их применения; классификацию уравнений в частных производных второго порядка. Уметь: определять возможности применения теоретических положений и методов математической физики для постановки и решения конкретных прикладных задач. Владеть навыками: применения методов математической физики к решению прикладных задач; математической формализации прикладных задач, анализа и интерпретации решений соответствующих математических моделей.	Темы 1– 9	Вопросы экзаменационных работ, контрольные работы.
2	ПК-1 ПК-1.1, ПК-1.2, ПК-1.3, ПК-1.4	Знать: вид базовых уравнений всех типов и их аналитических решений, а также физическую интерпретацию этих решений, физические законы, на которых базируется вывод конкретных уравнений; Уметь: строить математические модели различных стационарных и нестационарных физических процессов, протекающих в ограниченной среде и неограниченной среде на плоскости и в пространстве; описывать и анализировать процессы с помощью аппарата уравнений математической физики, давать полученным математическим результатам соответствующую интерпретацию; проводить оценку качества полученных решений прикладных задач. Владеть: навыками исследования математических моделей физических явлений, являющихся краевыми задачами для линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, математическими методами обработки и анализа информации в области основных разделов физики.	Темы 1-9	Вопросы экзаменационных работ, контрольные работы

Фонды оценочных средств по дисциплине «Методы математической физики»

Вопросы к контрольным работам:

1. Как определяется двойное векторное произведение?
2. Как вводится понятие вектора?
3. Как определяются операции сложения и вычитания векторов?
4. Как определяется скалярное произведение двух векторов?
5. Как определяется векторное произведение двух векторов?
6. Как определяется смешанное произведение трех векторов?
7. Как определяется градиент скалярного поля?
8. Какой физический смысл вектора градиента?
9. Как определяется производная вектора по времени?
10. Дайте определение дивергенции вектора.
11. Какое векторное поле называется соленоидальным?
12. Дайте определение ротора вектора.
13. Какое векторное поле называется безвихревым?
14. Дайте определение лапласиана.
15. Чему равен ротор градиента?
16. Чему равна дивергенция ротора?
17. Запишите основные типы линейных интегралов от векторных функций. Каким образом они вычисляются?
18. Как вводится вектор элемента поверхности?
19. Дайте определение потока вектора сквозь поверхность.
20. Сформулируйте интегральное определение дивергенции вектора.
21. Сформулируйте теорему Гаусса.
22. Как определяется понятие циркуляции вектора?
23. Сформулируйте теорему Стокса.
24. Сформулируйте интегральное определение ротора вектора.
25. Как записывается квадрат элемента длины в криволинейных координатах.
26. Как вводятся коэффициенты Ламе?
27. Как записываются выражения для основных дифференциальных операторов в криволинейной системе координат?
28. Чему равны коэффициенты Ламе для цилиндрической системы координат?
29. Как записываются выражения для основных дифференциальных операторов в цилиндрической системе координат?
30. Чему равны коэффициенты Ламе для сферической системы координат?
31. Как записываются выражения для основных дифференциальных операторов в сферической системе координат?
32. Каков физический смысл различных слагаемых в уравнении теплопроводности?
33. Какие основные типы УЧП и какие явления они описывают?
34. Каковы условия применимости метода разделения переменных?

35. Как можно преобразовать неоднородные граничные условия в однородные?
36. Перечислите основные свойства преобразования Фурье.
37. Перечислите основные свойства преобразования Лапласа.
38. В каких случаях для решения УЧП целесообразно применять преобразование Фурье?
39. В каких случаях для решения УЧП целесообразно применять преобразование Лапласа?
40. В чем состоит принцип Дюамеля?
41. Перечислите возможные граничные условия для волнового уравнения.
42. Перечислите свойства конечного преобразования Фурье.
43. В каких случаях целесообразно использовать для решения УЧП конечное преобразование Фурье?
44. В чем состоит метод характеристик?
45. Каковы основные свойства краевых задач?
46. Как решается внутренняя задача Дирихле?
47. Как решается задача Дирихле в кольце?
48. Запишите уравнение Лапласа в сферических координатах.
49. Запишите общий вид решения уравнения Лапласа в сферических координатах.
50. Что такое сферические гармоники?
51. Объясните физический смысл функции Грина.
52. Перечислите возможные методы численного решения УЧП.
53. Какая конечно-разностная схема называется явной?
54. Какая конечно-разностная схема называется неявной?
55. Запишите конечно-разностную схему для метода Кранка-Никольсона.
56. В чем состоит идея применения метода Монте-Карло для решения УЧП?

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству контрольная работа

Шкала оценивания	Критерий оценивания
5	Контрольная работа выполнена на высоком уровне (правильные ответы даны на 90-100% вопросов/задач)
4	Контрольная работа выполнена на среднем уровне (правильные ответы даны на 75-89% вопросов/задач)
3	Контрольная работа выполнена на низком уровне (правильные ответы даны на 50-74% вопросов/задач)
2	Контрольная работа выполнена на неудовлетворительном уровне (правильные ответы даны менее чем на 50%)

Теоретические вопросы

5 семестр

1. Уравнения с частными производными. Типы уравнений с частными производными.
2. Параболические уравнения и граничные условия.
3. Математическая модель теплопроводности. Вывод уравнения теплопроводности. Типы и физический смысл граничных условий для уравнения теплопроводности.
4. Некоторые уравнения диффузионного типа.
5. Метод разделения переменных. Условия применимости.
6. Задача Штурма-Лиувилля и ее свойства.
7. Решение неоднородных диффузионных УЧП методом разложения по собственным функциям.
8. Интегральные преобразования и спектр функции.
9. Синус- и косинус-преобразования Фурье и их свойства.
10. Преобразование Фурье и его свойства.
11. Решение УЧП с помощью преобразования Фурье.
12. Преобразование Лапласа. Свойства преобразования Лапласа.
13. Теорема о свертке.
14. Принцип Дюамеля.
15. Гиперболические УЧП.
16. Формула Даламбера.
17. Волновое уравнение и граничные условия.
18. Колебания ограниченной струны. Стоячие волны.
19. Каноническая форма гиперболического уравнения.
20. Волновое уравнение в свободном пространстве.
21. Конечные преобразования Фурье.
22. Принцип суперпозиции – основа теории линейных систем.
23. Уравнения первого порядка. Метод характеристик.
24. Нелинейные уравнения первого порядка. Законы сохранения.
25. Колебания мембраны.
26. Общие свойства краевых задач.
27. Внутренняя задача Дирихле.
28. Задача Дирихле в кольце.
29. Уравнение Лапласа в сферических координатах. Сферические гармоники.
30. Неоднородная задача Дирихле.
31. Численные решения эллиптических задач.
32. Явные разностные схемы.
33. Неявные разностные схемы. Метод Монте-Карло.

6 семестр

1. Конечно-разностные аппроксимации.
2. Решение задачи Дирихле методом конечных разностей.
3. Явные разностные схемы.
4. Неявные разностные схемы. Схема Кранка-Никольсона.
5. Метод Монте-Карло. Вычисление интеграла методом Монте-Карло.
6. Решение уравнений с частными производными методом Монте-Карло.
7. Игра «Блуждающий пьяница».
8. Решение уравнения Лапласа методом Монте-Карло.
9. Решение задачи Дирихле с переменными коэффициентами.
10. Вариационное исчисление. Функционал. Уравнение Эйлера-Лагранжа.
11. Минимизация функционала.
12. Теорема о минимуме энергии.
13. Метод Ритца минимизации функционалов.
14. Методы теории возмущений. Схема метода возмущений.
15. Решение нелинейного уравнения $\Delta u + u^2 = 0$ методом возмущений.
16. Задача с возмущенной границей.
17. Комплексные функции и конформные отображения.
18. Определение конформного отображения.
19. Уравнение Лапласа в верхней полуплоскости.
20. Задача Дирихле в области между двумя неконцентрическими окружностями.

Практические задания

5 семестр

1. Векторная алгебра

Задача 1.1. Задан постоянный вектор $\mathbf{V}$ с компонентами $V_x=1$ и $V_y=0$. Показать, что компоненты этого вектора в повернутой системе координат имеют вид: $V'_x = \cos \varphi$, $V'_y = -\sin \varphi$, что соответствует закону преобразования векторов.

Задача 1.2. Показать, что $(xyc_x + y^2c_y, -x^2c_x - xyc_y)$ образует вектор. Величины c_x и c_y являются компонентами постоянного вектора $\vec{c}$. Прodelать то же самое для $(xyc_x - x^2c_y, y^2c_x - xyc_y)$.

Задача 1.3. Разложением скалярного произведения показать, что если два вектора имеют направляющие косинусы $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ и $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ соответственно, то $\cos \theta = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2$, где θ – угол между двумя векторами.

Задача 1.4. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ и $\mathbf{B} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Задача 1.5. Даны векторы $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ и $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$. Определить скалярное и векторные произведения $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ и $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

Задача 1.6. Определить вектор $\mathbf{A}$, перпендикулярный к векторам $\mathbf{U} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{V} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Каким должен быть вектор $\mathbf{A}$, если дополнительно потребовать, чтобы он по абсолютной величине был равен единице?

Задача 1.7. Магнитная индукция $\mathbf{B}$ определена уравнением Лоренца $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$, где $\mathbf{v}$ – скорость электрического заряда q , а $\mathbf{F}$ – сила, действующая на заряд.

При выполнении трех экспериментов установлено, что:
1) $\mathbf{v} = \mathbf{i}$, $\mathbf{F}/q = 2\mathbf{k} - 4\mathbf{j}$, 2) $\mathbf{v} = \mathbf{j}$, $\mathbf{F}/q = 4\mathbf{i} - \mathbf{k}$, 3) $\mathbf{v} = \mathbf{k}$, $\mathbf{F}/q = \mathbf{j} - 2\mathbf{i}$.
По результатам экспериментов найти магнитную индукцию.

Ответ: $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

Задача 1.8. Сила $\mathbf{F}$ действует на тело, помещенное в точке $\mathbf{r}$. Показать, что результирующий момент L относительно любой из осей, проведенной через начало координат, равен $L = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ – единичный вектор в направлении этой оси.

Задача 1.9. Даны три вектора $\mathbf{A} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{B} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{C} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$. Найти смешанное произведение $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$. Имея в виду, что $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$, дать геометрическую интерпретацию смешанного произведения для данных векторов. Найти $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C}$.

Задача 1.10. Показать, что $(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = A^2 - B^2$,
 $(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 2\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

2. Векторный анализ

Задача 2.1. Делая поворот системы координат, показать, что $\nabla' \cdot \mathbf{V}' = \nabla \cdot \mathbf{V}$, и, следовательно, по определению дивергенция вектора – скаляр.

Задача 2.2. Твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Показать, что линейная скорость $\mathbf{v}$ соленоидальна.

Задача 2.3. Электростатическое поле точечного заряда q равно $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{r}_0}{r^2}$. Вычислить $\nabla \cdot \mathbf{E}$.

Задача 2.4. Убедиться, что ротор $\nabla \times \mathbf{V}$ перпендикулярен вектору $\mathbf{V}$, если $\mathbf{V} = \mathbf{i}V_x(x, y) + \mathbf{j}V_y(x, y)$ и $\nabla \times \mathbf{V} \neq 0$.

Задача 2.5. В квантовой механике операторы момента количества движения определены соотношениями

$$L_x = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad L_y = -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad L_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

Показать, что $L_x L_y - L_y L_x = i\hbar L_z$, и, следовательно, $\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\hbar \mathbf{L}$.

Задача 2.6. Доказать, что $\nabla \times (\varphi \nabla \varphi) = 0$.

Задача 2.7. Скаляр φ удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2 \varphi = 0$. Показать, что вектор $\nabla \varphi$ соленоидальный и безвихревой.

Задача 2.8. Скалярный потенциал $u_{LM} = j_L(ka)Y_{LM}(\theta, \varphi)$ удовлетворяет скалярному уравнению Гельмгольца $\nabla^2 u_{LM} + k^2 u_{LM} = 0$. Используя оператор момента количества движения $\mathbf{L} = -i(\mathbf{r} \times \nabla)$, можно построить векторные потенциалы $\mathbf{A}_{LM}^E = -\frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{L} u_{LM}$, $\mathbf{A}_{LM}^M = i \mathbf{L} u_{LM}$. Показать, что оба потенциала удовлетворяют уравнению $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - k^2 \mathbf{A} = 0$.

Задача 2.9. Зависящее от времени уравнение Шредингера имеет вид

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \cdot \nabla + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Положим, $\psi(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}, t) e^{iS(\mathbf{r}, t)/\hbar}$.

Показать, что такое представление ψ приводит к двум уравнениям (отдельно для реальной и мнимой части):

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V &= \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\nabla^2 A}{A}, \\ m \frac{\partial A}{\partial t} + (\nabla \mathbf{A}) \cdot (\nabla \mathbf{S}) + \frac{A}{2} \nabla^2 S &= 0. \end{aligned}$$

В квантовой механике плотность вероятности обнаружить частицу в данной точке пространства ρ определяется величиной A^2 , а плотность тока $\mathbf{J}$ — величиной $A^2 \nabla S / m$. Показать, что второе из написанных уравнений эквивалентно уравнению непрерывности $\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

3. Системы координат

Задача 3.1. Показать, что требованию ортогональности системы координат соответствует условие (2.7) $h_{ij} = 0, i \neq j$.

Задача 3.2. Показать, что якобиан $J \left(\frac{x, y, z}{q_1, q_2, q_3} \right) = h_1 h_2 h_3$ и, следовательно, элемент объема $J \left(\frac{x, y, z}{q_1, q_2, q_3} \right) = dq_1 dq_2 dq_3$ согласно с (2.11) равен $h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$.

Задача 3.3. Пусть $\mathbf{a}_1$ – единичный вектор в направлении возрастания q_1 . Показать, что

$$\nabla \cdot \mathbf{a}_1 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \cdot \frac{\partial(h_2 h_3)}{\partial q_1}, \quad \nabla \times \mathbf{a}_1 = \frac{1}{h_1} \left[\mathbf{a}_2 \frac{\partial h_1}{h_3 \partial q_3} - \mathbf{a}_3 \frac{\partial h_1}{h_2 \partial q_2} \right].$$

Задача 3.4. Используя векторное тождество $\nabla \cdot \nabla \mathbf{V} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{V} - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{V})$, получить в криволинейных координатах векторный лапласиан $\nabla \cdot \nabla \mathbf{V}$.

Задача 3.5. Выразить единичные векторы сферической системы координат через декартовы.

Задача 3.6. Получить формулы обратного преобразования

$$\mathbf{i} = \mathbf{r}_0 \sin \theta \cos \varphi + \boldsymbol{\theta}_0 \cos \theta \cos \varphi - \boldsymbol{\varphi}_0 \sin \varphi,$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{r}_0 \sin \theta \sin \varphi + \boldsymbol{\theta}_0 \cos \theta \sin \varphi + \boldsymbol{\varphi}_0 \cos \varphi,$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{r}_0 \cos \theta - \boldsymbol{\theta}_0 \sin \theta.$$

Задача 3.7. Частица перемещается в пространстве. Найти компоненты ее скорости и ускорения в сферической системе координат:

Задача 3.8. Движение частицы с массой m под действием центральных сил определяется вторым законом Ньютона $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_0 f(\mathbf{r})$. Показать, что $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{c} = \text{const}$ и геометрическое толкование этого факта приводит ко второму закону Кеплера.

4. Диффузионные задачи

Задача 4.1. Покажите, что функции вида $u(x, t) = e^{-\lambda^2 \alpha^2 t} [A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)]$ удовлетворяют уравнению $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ при произвольных значениях A, B и λ .

Задача 4.2. Покажите, что $\int_0^1 \sin(m\pi x) \sin(n\pi x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1 & m = n. \end{cases}$

Использовать тождество $\sin(mx) \sin(nx) = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$.

Задача 4.3. Найдите разложение в ряд Фурье по синусам функции $\varphi(x) = 1$ на отрезке $[0, 1]$. Постройте график первых трех-четырех членов разложения.

Задача 4.4. Методом разделения переменных решите следующую задачу для уравнения теплопроводности

$$(\text{УЧП}) \quad u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty,$$

$$(\text{ГУ}) \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u_x(1, t) = 0, \end{cases} \quad 0 < t < \infty,$$

$$(\text{НУ}) \quad u(x, 0) = x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Что представляет собой стационарное решение?

Задача 4.5. Найдите собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля

$$(ОДУ) \quad X'' + \lambda X = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$(ГУ) \quad \begin{cases} X(0) = 0, \\ X'(1) = 0. \end{cases}$$

Укажите конкретные выражения для функций $p(x), q(x)$ и $r(x)$ из общей задачи Штурма-Лиувилля для этого случая.

Задача 4.6. Решите задачу конвективной диффузии методом преобразования к более простому уравнению.

$$(УЧП) \quad u_t = u_{xx} - u_x, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty,$$

$$(ГУ) \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = 0, \end{cases} \quad 0 < t < \infty,$$

$$(НУ) \quad u(x, 0) = e^{x/2}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

Задача 4.7. Решите задачу методом разложения по собственным функциям

$$(УЧП) \quad u_t = u_{xx} + \sin(\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty,$$

$$(ГУ) \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = 0, \end{cases} \quad 0 < t < \infty, \quad .$$

$$(НУ) \quad u(x, 0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

Задача 4.8. Найдите решение задачи методом разложения по собственным функциям, если λ_1 – первый корень уравнения $\operatorname{tg} \lambda = -\lambda$. Каковы собственные функции этой задачи?

$$(УЧП) \quad u_t = u_{xx} + \sin(\lambda_1 x), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty,$$

$$(ГУ) \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u_x(1, t) + u(1, t) = 0, \end{cases} \quad 0 < t < \infty,$$

$$(НУ) \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

Задача 4.9. Решите задачу преобразовав сначала граничные условия к нулевым. Получившуюся при этом задачу решите методом разложения по собственным функциям.

$$(УЧП) \quad u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty,$$

$$(ГУ) \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = 0, \end{cases} \quad 0 < t < \infty, \quad .$$

$$(НУ) \quad u(x, 0), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

5. Решение УЧП методом интегральных преобразований

Задача 5.1. Докажите тождества.

$$1. \mathfrak{I}_s[f'] = -\omega \mathfrak{I}_s[f]$$

$$2. \mathfrak{I}_s[f''] = \frac{2}{\pi} \omega f(0) - \omega^2 \mathfrak{I}_s[f]$$

Задача 5.2. Решите задачу Коши

$$(\text{ОДУ}) \quad \frac{dU(t)}{dt} + \omega^2 \alpha^2 U(t) = \frac{2A\omega\alpha^2}{\pi},$$

$$(\text{НУ}) \quad U(0) = 0.$$

Задача 5.3. Разложите в ряд Фурье по синусам функцию

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < 1, \end{cases}$$

$$f(x+2) = f(x) \quad (\text{условие периодичности}).$$

Постройте графики суммы первых 2, 3 и 4 слагаемых, чтобы проследить за сходимостью ряда к $f(x)$. Постройте график частотного спектра функции $f(x)$.

Задача 5.4. С помощью преобразования Лапласа решите задачу Коши

$$(\text{УЧП}) \quad u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty,$$

$$(\text{НУ}) \quad u(x, 0) = \sin x, \quad -\infty < x < \infty.$$

бсеместр

6. Гиперболические задачи

Задача 6.1. Найдите решение задачи о колебаниях струны при начальных условиях вида

$$u(x, 0) = \sin(3\pi x/L),$$

$$u_t(x, 0) = (3\pi\alpha/L) \sin(3\pi x/L).$$

Задача 6.2. Решите задачу о затухающих колебаниях струны

$$(\text{УЧП}) \quad u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} - \beta u_t, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty,$$

$$(\text{ГУ}) \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = 0, \end{cases} \quad 0 < t < \infty,$$

$$(\text{НУ}) \quad \begin{cases} u(x, 0) = f(x), \\ u_t(x, 0) = 9. \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1,$$

Задача 6.3. Найдите решение задачи Коши:

$$(УЧП) \quad u_{tt} = u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty,$$

$$(НУ) \quad \begin{cases} u(x, 0) = 0, \\ u_t(x, 0) = xe^{-x^2}, \end{cases} \quad -\infty < x < \infty.$$

Постройте график решения в различные моменты времени.

Задача 6.4. Решите смешанную задачу для полубесконечной струны

$$(УЧП) \quad u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty,$$

$$(НУ) \quad \begin{cases} u(x, 0) = xe^{-x^2}, \\ u_t(x, 0) = 0. \end{cases} \quad 0 < x < \infty.$$

Постройте графики решения для различных моментов времени.

Задача 6.5. Найдите безразмерную форму для задачи

$$(УЧП) \quad u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L,$$

$$(ГУ) \quad \begin{cases} u(0, t) = T_1, \\ u(L, t) = 0, \end{cases} \quad 0 < t < \infty,$$

$$(НУ) \quad u(x, 0) = T_2, \quad 0 \leq x \leq L.$$

Задача 6.6. Выясните, являются ли приведенные ниже уравнения гиперболическими, параболическими или эллиптическими:

а) $u_{xx} - u_{xy} = 0,$

б) $u_{tt} = u_{xx} + u_x + hu,$

в) $u_{xx} + 3u_{yy} = \sin x,$

г) $u_{xx} + u_{yy} = f(x, y),$

д) $u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = f(r, \theta).$

Задача 6.7. Решите диффузионную задачу с изолированными границами, т. е.

$$(УЧП) \quad u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty,$$

$$(ГУ) \quad \begin{cases} u_x(0, t) = 0, \\ u_x(1, t) = 0, \end{cases} \quad 0 < t < \infty,$$

$$(НУ) \quad u(x, 0) = 1 + \cos(\pi x) + 0,5 \cos(3\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Задача 6.8. Решите в общем виде задачу

$$(УЧП) \quad u_t = \alpha^2 u_{xx} + bu + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty,$$

$$(ГУ) \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = 0, \end{cases} \quad 0 < t < \infty,$$

$$(НУ) \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Задача 6.9. Используя принцип суперпозиции, решите смешанную задачу

$$(УЧП) \quad u_{tt} = u_{xx} + \sin(3\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty,$$

$$(ГУ) \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = 0, \end{cases} \quad 0 < t < \infty,$$

$$(НУ) \quad \begin{cases} u(x, 0) = \sin(\pi x), \\ u_t(x, 0) = 0, \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Для каждой из подзадач выберите метод решения по своему вкусу.

Задача 6.10. Предположим, что u_1 и u_2 – решения следующих уравнений:

$$\text{а) } u_t = u_{xx}; \quad \text{б) } u_t = u_{xx} + e^t; \quad \text{в) } u_t = e^{-t} u_{xx}; \quad \text{г) } u_t = u_{xx} + u^2.$$

Для каких уравнений функция $u_1 + u_2$ также будет решением?

7.УЧП первого порядка

Задача 7.1. Решите задачу

$$(УЧП) \quad u_t = u_{xx} + \sin(3\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty,$$

$$(ГУ) \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = 0, \end{cases} \quad 0 < t < \infty,$$

$$(НУ) \quad u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Задача 7.2. Используя принцип суперпозиции, решите смешанную задачу

$$(УЧП) \quad u_{tt} = u_{xx} + \sin(3\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty,$$

$$(ГУ) \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = 0, \end{cases} \quad 0 < t < \infty,$$

$$(НУ) \quad \begin{cases} u(x, 0) = \sin(\pi x), \\ u_t(x, 0) = 0, \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Задача 7.3. Подставьте $u(r, \theta, t) = U(r, \theta)T(t)$ в волновое уравнение

$$u_{tt} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} \right)$$

чтобы разделить его на два уравнения

$$\Delta U + \lambda^2 U = 0,$$

$$T'' + \lambda^2 c^2 T = 0.$$

Задача 7.4. Подстановкой $U(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ приведите задачу Гельмгольца

$$\Delta U + \lambda^2 U = 0,$$

$$U(1, \theta) = 0.$$

к виду

$$r^2 R'' + rR' + (\lambda^2 r^2 - n^2)R = 0,$$

$$R(1) = 0,$$

$$\Theta'' + n\theta^2 = 0.$$

Константу разделения мы обозначили n^2 . Почему n может принимать только значения 0, 1, 2, ...?

8. Эллиптические задачи

Задача 8.1. Как записать волновое уравнение $u_{tt} = \alpha^2 \Delta u$ в сферических координатах, если вам известно, что решение зависит только от r и t ?

Задача 8.2. Как записать волновое уравнение $u_{tt} = \alpha^2 \Delta u$ в полярных координатах, если известно, что решение зависит только от r и t ?

Задача 8.3. Как записать уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ в полярных координатах, если известно, что u зависит только от r ? Каково решение этого уравнения? Эти функции называются потенциалами с круговой симметрией.

Задача 8.4. Имеет ли задача Неймана решение внутри круга?

$$(УЧП) \quad \Delta u = 0, \quad 0 < r < 1,$$

$$(ГУ) \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \sin^2 \theta$$

Задача 8.5. Найдите решение внутренней задачи Дирихле в круге радиусом $R = 2$. Как выглядит график этого решения?

$$(УЧП) \quad \Delta u = 0, \quad 0 < r < 2,$$

$$(ГУ) \quad u(2, \theta) = \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Задача 8.6. Подставьте $R(r) = r^\alpha$ в уравнение Эйлера

$$r^2 R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0$$

и получите $\alpha = n$ и $\alpha = -(n+1)$.

Задача 8.7. Сделайте замену переменной $x = \cos \varphi$ в уравнении Лежандра

$$[\sin \varphi \Phi']' + n(n+1) \sin \varphi \Phi = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi,$$

и приведите его к виду

$$(1-x^2) \frac{d^2 \Phi}{dx^2} - 2x \frac{d\Phi}{dx} + (n+1)n\Phi = 0, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

9. Численные и приближенные методы

Задача 9.1. Исходя из функционала

$$J[y] = \iint_D F(x, y, u, u_x, u_y) dx dy$$

получите уравнение Эйлера-Лагранжа $F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} = 0$.

Задача 9.2. Рассмотрите решение нелинейного уравнения $\Delta u + u^2 = 0$ методом возмущений.

Задача 9.3. Рассмотрите решение уравнения Лапласа внутри деформированного круга

Задача 9.4. Рассмотрите решение методом теории возмущений задачи Коши.

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству промежуточный контроль (экзамен)

Шкала оценивания	Критерий оценивания
отлично (5)	Студент глубоко и в полном объёме владеет программным материалом. Грамотно, исчерпывающе и логично его излагает в устной или письменной форме. При этом знает рекомендованную литературу, проявляет творческий подход в ответах на вопросы и правильно обосновывает принятые решения, хорошо владеет умениями и навыками при выполнении практических задач.
хорошо (4)	Студент знает программный материал, грамотно и по сути излагает его в устной или письменной форме, допуская незначительные неточности в утверждениях, трактовках, определениях и категориях или незначительное количество ошибок. При этом владеет необходимыми умениями и навыками при выполнении практических задач.
удовлетворительно (3)	Студент знает только основной программный материал, допускает неточности, недостаточно чёткие формулировки, непоследовательность в ответах, излагаемых в устной или письменной форме. При этом недостаточно владеет умениями и навыками при выполнении практических задач. Допускает до 30% ошибок в излагаемых ответах.
неудовлетворительно (2)	Студент не знает значительной части программного материала. При этом допускает принципиальные ошибки в доказательствах, в трактовке понятий и категорий, проявляет низкую культуру знаний, не владеет основными умениями и навыками при выполнении практических задач. Студент отказывается от ответов на дополнительные вопросы

Лист изменений и дополнений

№ п/п	Виды дополнений и изменений	Дата и номер протокола заседания кафедры (кафедр), на котором были рассмотрены и одобрены изменения и дополнения	Подпись (с расшифровкой) заведующего кафедрой (заведующих кафедрами)