

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ВЛАДИМИРА ДАЛЯ»

Факультет компьютерных систем и информационных технологий

Кафедра прикладной математики



УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета компьютерных
систем и информационных технологий

Кочевский А. А.

19 » апреля 2023 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

«Краевые задачи и вариационное исчисление»

по направлению подготовки 01.03.03 Механика и математическое
моделирование

профиль подготовки «Механика деформируемых тел и сред»

Лист согласования РПУД

Рабочая программа учебной дисциплины «Краевые задачи и вариационное исчисление» по направлению подготовки 01.03.03 Механика и математическое моделирование. – 12 с.

Рабочая программа учебной дисциплины «Краевые задачи и вариационное исчисление» составлена на основе федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 01.03.03 Механика и математическое моделирование, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10 января 2018 года № 10 (с изменениями и дополнениями), зарегистрированного в Министерстве юстиции Российской Федерации 06 февраля 2018 года за № 49933, учебного плана по направлению подготовки 01.03.03 Механика и математическое моделирование, (профиль «Механика деформируемых тел и сред») и Положения о рабочей программе учебной дисциплины в ФГБОУ ВО «ЛГУ им. В. Даля».

СОСТАВИТЕЛЬ

канд. техн. наук, доцент, заведующий кафедрой прикладной математики Малый В. В.
старший преподаватель кафедры прикладной математики Киркина Т. Ю.

Рабочая программа дисциплины утверждена на заседании кафедры прикладной математики

18 апреля 2023 г., протокол № 10

Заведующий кафедрой прикладной математики  Малый В. В.

Переутверждена: «___» _____ 20__ г., протокол № _____

Согласована:

Декан факультета компьютерных систем и информационных технологий  Кочевский А. А.

Рекомендована на заседании учебно-методической комиссии факультета компьютерных систем и информационных технологий

19 апреля 2023 г., протокол № 8

Председатель учебно-методической комиссии факультета компьютерных систем и информационных технологий  Ветрова Н. Н.

Структура и содержание дисциплины

1. Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе

Цель изучения дисциплины – овладение студентами необходимым математическим аппаратом, помогающим анализировать, моделировать, программировать, решать прикладные задачи

Задачи: развитие логического и алгоритмического мышления студентов; овладение студентами методами исследования и алгоритмами решения математически формализованных задач; выработка у студентов навыка самостоятельно расширять свои математические знания, умения ориентироваться в потоке научной и технической информации; повышение общего уровня математической культуры; формирование фундаментальных систематизированных знаний

2. Место дисциплины в структуре ОПОП ВО

Дисциплина «Краевые задачи и вариационное исчисление» входит в блок дисциплин части учебного плана, формируемой участниками образовательных отношений.

Содержание дисциплины является логическим продолжением содержания дисциплин: «Математический анализ», «Алгебра и геометрия», «Дифференциальные уравнения», «Уравнения математической физики», «теория функций комплексного переменного», «Уравнения математической физики», «Численные методы» и служит основой для освоения дисциплин: выполнения квалификационной работы.

3. Требования к результатам освоения содержания дисциплины

Студенты, завершившие изучение дисциплины «Краевые задачи и вариационное исчисление», должны

знать:

классические задачи математической физики и вариационного исчисления, различные типы решений и способы их получения, выбирать математические методы для их решения с использованием компьютеров.

уметь:

ставить и решать краевые задачи математической физики и простейшие задачи вариационного исчисления, применять различные способы получения решений для различных типов задач.

иметь представление:

о краевых задачах математической физики, о понятии функционала и его вариации, об основной формуле для вариации функционала, о вариационной производной функционала.

Перечисленные результаты образования являются основой для формирования следующих компетенций (в соответствии с ФГОС ВО и требованиями к результатам освоения основной профессиональной образовательной программы (ОПОП ВО):

общепрофессиональных:

- ОПК-1 способен использовать фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, в профессиональной деятельности
- ОПК-5 способен использовать в педагогической деятельности научные основы знаний в сфере математики и механики

4. Структура и содержание дисциплины

4.1. Объем учебной дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Объем часов (з.е.)		
	Очная форма	Очно-заочная форма	Заочная форма
Объем учебной дисциплины (всего)	108 (3 з.е.)	108 (3 з.е.)	-
Обязательная аудиторная учебная нагрузка дисциплины (всего) в том числе:	56	24	-
Лекции	28	12	-
Семинарские занятия	-	-	-
Практические занятия	28	12	-
Лабораторные работы	-	-	-
Курсовая работа (курсовой проект)	-	-	-
Индивидуальное задание	18	18	-
Самостоятельная работа студента (всего)	52	84	-
Форма аттестации	зачет	зачет	-

4.2. Содержание разделов дисциплины

- Тема 1. Функционал. Вариация и ее свойства.
История зарождения вариационного исчисления; функционал; линейное нормированное пространство; вариация функционала.
- Тема 2. Основная лемма вариационного исчисления.
Глобальный минимум (максимум); локальные экстремумы; необходимые условия локального экстремума; лемма Лагранжа
- Тема 3. Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления с неподвижными границами.
Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления с неподвижными границами.
- Тема 4. Уравнение Эйлера.
Обобщение уравнения Эйлера; частные случаи уравнения Эйлера; задача о брахистохроне.
- Тема 5. Задачи с подвижными концами.
Основная формула для вариации функционала для задачи со свободными концами; решение задачи со свободными концами.
- Тема 6. Задачи с подвижными границами.

- Вариация функционала в задаче с подвижными границами; условия трансверсальности.
- Тема 7. Применение вариационных методов к получению краевых задач математической физики.
Применение вариационных методов к получению краевых задач математической физики.
- Тема 8. Постановки краевых задач и их физическая трактовка.
Понятие о краевых задачах в уравнениях в частных производных (УЧП) или уравнениях математической физики (УМФ), их смысле и составе. Виды краевых задач (КЗ). Связь их с задачей Коши.
- Тема 9. Параболические УМФ или уравнение распространения тепла в стержне.
Типы краевых задач с однородными и неоднородными граничными условиями (ГУ).
- Тема 10. Краевые задачи с граничными условиями первого и второго рода.
Краевые задачи с граничными условиями первого и второго рода в УМФ разных типов.
- Тема 11. КЗ для решения уравнений колебаний или волновых уравнений гиперболического типа.
КЗ для решения уравнений колебаний или волновых уравнений гиперболического типа.
- Тема 12. КЗ для уравнений эллиптического типа.
КЗ для уравнений эллиптического типа, описывающих стационарные процессы трех типов: граничные условия первого рода (задача Дирихле); граничные условия второго рода (задача Неймана); поток через границу; граничные условия третьего рода смешанных типов (задача Робена).
- Тема 13. Основные краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона.
Первая краевая задача, или Дирихле. внутри области D , удовлетворяющая уравнению Лапласа (Пуассона), в замкнутой области; вторая краевая задача, или задача Неймана, удовлетворяющая в ней уравнению Лапласа (Пуассона).
- Тема 14. Приложение вариационных методов.
Приложение вариационных методов к решению краевых задач математической физики методами Ритца, Бубнова-Галеркина и конечных элементов.

4.3. Лекции

№ п/п	Название темы	Объем часов		
		Очная форма	Очно-заочная форма	Заочная форма
1	Функционал. Вариация и ее свойства.	2	1	-
2	Основная лемма вариационного исчисления.	2	1	-
3	Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления с неподвижными границами.	2	1	-

4	Уравнение Эйлера.	2	1	-
5	Задачи с подвижными концами.	2	1	-
6	Задачи с подвижными границами.	2	1	-
7	Применение вариационных методов к получению краевых задач математической физики.	2	1	-
8	Постановки краевых задач и их физическая трактовка.	2	1	-
9	Параболические УМФ или уравнение распространения тепла в стержне.	2	1	-
10	Краевые задачи с граничными условиями первого и второго рода.	2	1	-
11	КЗ для решения уравнений колебаний или волновых уравнений гиперболического типа.	2	1	-
12	КЗ для уравнений эллиптического типа.	2	1	-
13	Основные краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона.	2	-	-
14	Приложение вариационных методов.	2	-	-
Итого:		28	12	-

4.4. Практические (семинарские) занятия

№ п/п	Название темы	Объем часов		
		Очная форма	Очно-заочная форма	Заочная форма
1	Функционал. Вариация и ее свойства.	2	1	-
2	Основная лемма вариационного исчисления.	2	1	-
3	Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления с неподвижными границами.	2	1	-
4	Уравнение Эйлера.	2	1	-
5	Задачи с подвижными концами.	2	1	-
6	Задачи с подвижными границами.	2	1	-
7	Применение вариационных методов к получению краевых задач математической физики.	2	1	-
8	Постановки краевых задач и их физическая трактовка.	2	1	-
9	Параболические УМФ или уравнение распространения тепла в стержне.	2	1	-
10	Краевые задачи с граничными условиями первого и второго рода.	2	1	-
11	КЗ для решения уравнений колебаний или волновых уравнений гиперболического типа.	2	1	-
12	КЗ для уравнений эллиптического типа.	2	1	-
13	Основные краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона.	2	-	-
14	Приложение вариационных методов.	2	-	-
Итого:		28	12	-

4.5. Лабораторные работы

Не предусмотрены

4.6. Самостоятельная работа студентов

№ п/п	Название темы	Вид СРС	Объем часов		
			Очная форма	Очно- заочная форма	Заочная форма
1	Функционал. Вариация и ее свойства.	Проработка материала лекций и учебников	2	6	-
2	Основная лемма вариационного исчисления.	Проработка материала лекций и учебников, выполнение индивидуального задания	2	6	-
3	Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления с неподвижными границами.	Проработка материала лекций и учебников, выполнение индивидуального задания	4	6	-
4	Уравнение Эйлера.	Проработка материала лекций и учебников, выполнение индивидуального задания	4	6	-
5	Задачи с подвижными концами.	Проработка материала лекций и учебников, выполнение индивидуального задания	4	6	-
6	Задачи с подвижными границами.	Проработка материала лекций и учебников, выполнение индивидуального задания	4	6	-
7	Применение вариационных методов к получению краевых задач математической физики.	Проработка материала лекций и учебников, выполнение индивидуального задания	4	6	-
8	Постановки краевых задач и их физическая трактовка.	Проработка материала лекций и учебников, выполнение индивидуального задания	4	6	-
9	Параболические УМФ или уравнение распространения тепла в стержне.	Проработка материала лекций и учебников, выполнение индивидуального задания	4	6	-
10	Краевые задачи с граничными условиями первого и второго рода.	Проработка материала лекций и учебников, выполнение индивидуального задания	4	6	-
11	КЗ для решения уравнений колебаний или волновых уравнений гиперболического типа.	Проработка материала лекций и учебников, выполнение индивидуального задания	4	6	-
12	КЗ для уравнений эллиптического типа.	Проработка материала лекций и учебников, выполнение индивидуального задания	4	6	-
13	Основные краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона.	Проработка материала лекций и учебников, выполнение индивидуального задания	4	6	-

14	Приложение вариационных методов.	Проработка материала лекций и учебников, выполнение индивидуального задания	4	6	-
Итого:			52	84	-

4.7. Курсовые работы/проекты

Курсовые работы (проекты) не предусмотрены.

5. Образовательные технологии

Преподавание дисциплины ведется с применением следующих видов образовательных технологий:

- традиционные объяснительно-иллюстративные технологии, которые обеспечивают доступность учебного материала для большинства студентов, системность, отработанность организационных форм и привычных методов, относительно малые затраты времени;

- технологии проблемного обучения, направленные на развитие познавательной активности, творческой самостоятельности студентов и предполагающие последовательное и целенаправленное выдвижение перед студентом познавательных задач, разрешение которых позволяет студентам активно усваивать знания (используются поисковые методы; постановка познавательных задач);

- технологии развивающего обучения, позволяющие ориентировать учебный процесс на потенциальные возможности студентов, их реализацию и развитие;

- технологии концентрированного обучения, суть которых состоит в создании максимально близкой к естественным психологическим особенностям человеческого восприятия структуры учебного процесса и которые дают возможность глубокого и системного изучения содержания учебных дисциплин за счет объединения занятий в тематические блоки;

- технологии модульного обучения, дающие возможность обеспечения гибкости процесса обучения, адаптации его к индивидуальным потребностям и особенностям обучающихся (применяются, как правило, при самостоятельном обучении студентов по индивидуальному учебному плану);

- технологии дифференцированного обучения, обеспечивающие возможность создания оптимальных условий для развития интересов и способностей студентов, в том числе и студентов с особыми образовательными потребностями, что позволяет реализовать в культурно-образовательном пространстве университета идею создания равных возможностей для получения образования

- технологии активного (контекстного) обучения, с помощью которых осуществляется моделирование предметного, проблемного и социального содержания будущей профессиональной деятельности студентов (используются активные и интерактивные методы обучения) и т.д.

Максимальная эффективность педагогического процесса достигается путем конструирования оптимального комплекса педагогических технологий и (или) их элементов на личностно-ориентированной, деятельностной,

диалогической основе и использования необходимых современных средств обучения.

6. Формы контроля освоения дисциплины

Текущая аттестация студентов производится в дискретные временные интервалы лектором или преподавателем, ведущим практические занятия по дисциплине, в следующих формах:

- фронтальные и индивидуальные опросы;
- контрольные работы;
- защита индивидуальных заданий.

Фонды оценочных средств, включающие типовые индивидуальные задания, контрольные работы, позволяющие оценить результаты текущей и промежуточной аттестации обучающихся по данной дисциплине, помещаются в приложении к рабочей программе в соответствии с «Положением о фонде оценочных средств».

Промежуточная аттестация по результатам освоения дисциплины проходит в форме зачета (предполагает выполнение всех видов учебной работы, предусмотренных рабочей программой учебной дисциплины)

В экзаменационную ведомость и зачетную книжку выставляются оценки по шкале, приведенной в таблице.

Характеристика знания предмета и ответов	Зачеты
Студент глубоко и в полном объеме владеет программным материалом. Грамотно, исчерпывающе и логично его излагает в устной или письменной форме. При этом знает рекомендованную литературу, проявляет творческий подход в ответах на вопросы и правильно обосновывает принятые решения, хорошо владеет умениями и навыками при выполнении практических задач.	зачтено
Студент знает программный материал, грамотно и по сути излагает его в устной или письменной форме, допуская незначительные неточности в утверждениях, трактовках, определениях и категориях или незначительное количество ошибок. При этом владеет необходимыми умениями и навыками при выполнении практических задач.	
Студент знает только основной программный материал, допускает неточности, недостаточно четкие формулировки, непоследовательность в ответах, излагаемых в устной или письменной форме. При этом недостаточно владеет умениями и навыками при выполнении практических задач. Допускает до 30% ошибок в излагаемых ответах.	
Студент не знает значительной части программного материала. При этом допускает принципиальные ошибки в доказательствах, в трактовке понятий и категорий, проявляет низкую культуру знаний, не владеет основными умениями и навыками при выполнении практических задач. Студент отказывается от ответов на дополнительные вопросы.	не зачтено

7. Учебно-методическое и программно-информационное обеспечение дисциплины:

а) основная литература:

Бренерман М.Х., Вариационное исчисление : учебное пособие / Бренерман М. Х., Жихарев В. А. - Казань : Издательство КНИТУ, 2017. - 148 с. - ISBN 978-5-7882-2198-4 - Текст : электронный // ЭБС "Консультант

студента" : [сайт]. - URL : <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785788221984.html> (дата обращения: 01.09.2022). - Режим доступа : по подписке.

Васильева А.Б., Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах / Васильева А. Б., Медведев Г. Н., Тихонов Н. А., Уразгильдина Т. А. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 432 с. (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 10) - ISBN 5-9221-0276-1 - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922102761.html> (дата обращения: 01.09.2022). - Режим доступа : по подписке.

Зарубин В.С., Математическое моделирование в технике : учеб. для вузов / В.С. Зарубин - М. : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2010. - 495 с. (Серия Математика в техническом университете“. Вып. XXI, заключительный) - ISBN 978-5-7038-3194-6 - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785703831946.html> (дата обращения: 01.09.2022). - Режим доступа : по подписке.

Романко В.К., Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению / В. К. Романко [и др.] ; под ред. В. К. Романко. - 5-е изд. (эл.). - М. : БИНОМ, 2015. - 222 с. - ISBN 978-5-9963-2662-4 - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785996326624.html> (дата обращения: 01.09.2022). - Режим доступа : по подписке.

б) дополнительная литература:

Вахрушев Н.В., Специальные функции. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление : учеб. пособие. / Н.В. Вахрушев, Т.М. Назарова, В.В. Хаблов - Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2011. - 72 с. - ISBN 978-5-7782-1834-5 - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785778218345.html> (дата обращения: 01.09.2022). - Режим доступа : по подписке.

Гельфанд И. М. Вариационное исчисление [Текст] : учебник / И. М. Гельфанд, С. В. Фомин. - М. : Физматгиз, 1961. - 228 с.

Грибанов В. М. Вариационное исчисление: Конспект лекций [Текст] / В. М. Грибанов. - Луганск : ВУГУ, 1998. - 71 с.

Карташев А. П. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления [Текст] : учеб. пособие / А. П. Карташев, Б. Л. Рождественский. - 3-е изд., перераб. и доп. - М. : Наука, 1986. - 272 с.

Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике [Текст] / С. Г. Михлин. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Наука, 1970. - 512 с.

Нефедов Ю. М. Вариационные методы в примерах и задачах [Текст] : учеб. пособие / Ю. М. Нефедов. - Луганск : Изд-во ВЛУ им В. Даля, 2006. - 208 с.

Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление [Текст] / Л. Э. Эльсгольц. - 2-е изд., стер. - М. : Наука, 1969. - 424 с.

Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления [Текст] / Л. Янг ; пер. с англ. М. Г. Элуашвили; под ред. В. М. Алексеева. - М. : Мир, 1974. - 488 с.

в) методические указания:

Конспект лекций по дисциплине «Краевые задачи и вариационное исчисление» для студентов, обучающихся по направлениям подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 01.03.03 «Механика и математическое моделирование» [Электронный ресурс] / сост. Б. И. Горбачёв. - Луганск : ЛНУ им. В. Даля, 2019. - 96 с.

г) Интернет-ресурсы:

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации – <https://minobrnauki.gov.ru/>

Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки – <http://obrnadzor.gov.ru/>

Портал Федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования – <http://fgosvo.ru>

Федеральный портал «Российское образование» – <http://www.edu.ru/>

Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» – <http://window.edu.ru/>

Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов – <http://fcior.edu.ru/>

Электронные библиотечные системы и ресурсы

Электронно-библиотечная система «Консультант студента» – <http://www.studentlibrary.ru/cgi-bin/mb4x>

Информационный ресурс библиотеки образовательной организации

Научная библиотека имени А. Н. Коняева – <http://biblio.dahluniver.ru/>

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Освоение дисциплины предполагает использование академических аудиторий, соответствующих действующим санитарным и противопожарным правилам и нормам.

Прочее: рабочее место преподавателя, оснащенное компьютером с доступом в Интернет.

Программное обеспечение:

Функциональное назначение	Бесплатное программное обеспечение	Ссылки
Офисный пакет	Libre Office 6.3.1	https://www.libreoffice.org/ https://ru.wikipedia.org/wiki/LibreOffice
Операционная система	UBUNTU 19.04	https://ubuntu.com/ https://ru.wikipedia.org/wiki/Ubuntu
Браузер	Firefox Mozilla	http://www.mozilla.org/ru/firefox/fx
Браузер	Opera	http://www.opera.com
Почтовый клиент	Mozilla Thunderbird	http://www.mozilla.org/ru/thunderbird
Файл-менеджер	Far Manager	http://www.farmanager.com/download.php
Архиватор	7Zip	http://www.7-zip.org/
Графический редактор	GIMP (GNU Image Manipulation Program)	http://www.gimp.org/ http://gimp.ru/viewpage.php?page_id=8 http://ru.wikipedia.org/wiki/GIMP
Редактор PDF	PDFCreator	http://www.pdfforge.org/pdfcreator
Аудиоплеер	VLC	http://www.videolan.org/vlc/

**Паспорт
фонда оценочных средств по учебной дисциплине
«Краевые задачи и вариационное исчисление»**

**Перечень компетенций (элементов компетенций),
формируемых в результате освоения учебной дисциплины**

№ п/п	Код контролируемой компетенции	Формулировка контролируемой компетенции	Контролируемые темы учебной дисциплины	Этапы формирования (семестр изучения)
1	ОПК-1	способен использовать фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, в профессиональной деятельности	Тема 1. Функционал. Вариация и ее свойства. Тема 2. Основная лемма вариационного исчисления. Тема 3. Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления с неподвижными границами. Тема 4. Уравнение Эйлера. Тема 5. Задачи с подвижными концами. Тема 6. Задачи с подвижными границами. Тема 7. Применение вариационных методов к получению краевых задач математической физики. Тема 8. Постановки краевых задач и их физическая трактовка. Тема 9. Параболические УМФ или уравнение распространения тепла в стержне. Тема 10.	заключительный (8)

			Краевые задачи с граничными условиями первого и второго рода. Тема 11. КЗ для решения уравнений колебаний или волновых уравнений гиперболического типа. Тема 12. КЗ для уравнений эллиптического типа. Тема 13. Основные краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона. Тема 14. Приложение вариационных методов.	
2	ОПК-2	способен использовать в педагогической деятельности научные основы знаний в сфере математики и механики	Тема 1. Функционал. Вариация и ее свойства. Тема 2. Основная лемма вариационного исчисления. Тема 3. Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления с неподвижными границами. Тема 4. Уравнение Эйлера. Тема 5. Задачи с подвижными концами. Тема 6. Задачи с подвижными границами. Тема 7. Применение вариационных методов к получению краевых задач математической физики.	заключительный (8)

			Тема 8. Постановки краевых задач и их физическая трактовка. Тема 9. Параболические УМФ или уравнение распространения тепла в стержне. Тема 10. Краевые задачи с граничными условиями первого и второго рода. Тема 11. КЗ для решения уравнений колебаний или волновых уравнений гиперболического типа. Тема 12. КЗ для уравнений эллиптического типа. Тема 13. Основные краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона. Тема 14. Приложение вариационных методов.	
--	--	--	---	--

**Показатели и критерии оценивания компетенций,
описание шкал оценивания**

№ п/п	Код контролируемой компетенции	Показатель оценивания (знания, умения, навыки)	Контролируемые темы учебной дисциплины	Наименование оценочного средства
1	ОПК-1 ОПК-5	знать: классические задачи математической физики и вариационного исчисления, различные типы решений и способы их получения, выбирать математические методы для их решения с использованием компьютеров. уметь: ставить и решать краевые задачи	Тема 1. Функционал. Вариация и ее свойства. Тема 2. Основная лемма вариационного исчисления. Тема 3. Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления с	Фронтальные и индивидуальные опросы; контрольные работы; индивидуальные задания, промежуточная аттестация (зачет)

		математической физики и простейшие задачи вариационного исчисления, применять различные способы получения решений для различных типов задач. иметь представление: о краевых задачах математической физики, о понятии функционала и его вариации, об основной формуле для вариации функционала, о вариационной производной функционала.	неподвижными границами. Тема 4. Уравнение Эйлера. Тема 5. Задачи с подвижными концами. Тема 6. Задачи с подвижными границами. Тема 7. Применение вариационных методов к получению краевых задач математической физики. Тема 8. Постановки краевых задач и их физическая трактовка. Тема 9. Параболические УМФ или уравнение распространения тепла в стержне. Тема 10. Краевые задачи с граничными условиями первого и второго рода. Тема 11. КЗ для решения уравнений колебаний или волновых уравнений гиперболического типа. Тема 12. КЗ для уравнений эллиптического типа. Тема 13.	
--	--	---	--	--

			Основные краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона. Тема 14. Приложение вариационных методов.	
--	--	--	---	--

**Фонды оценочных средств по дисциплине
«Краевые задачи и вариационное исчисление»**

Вопросы для фронтальных и индивидуальных опросов:

Тема 1. Вариационное исчисление.

1. Определение классического функционала.
2. Связь между вариационными задачами и задачами математического анализа (метод Эйлера)
3. Простейшая задача вариационного исчисления.
4. Уравнение Эйлера.
5. Уравнения Эйлера для некоторых частных случаев классических функционалов
6. Задача об экстремуме классических функционалов на классе кривых, концы которых скользят по двум фиксированным вертикальным прямым.
7. Необходимые условия экстремума функционалов, зависящих от функции нескольких переменных типа $J[z] = \iint_G F(x, y, z(x, y), z_x(x, y), z_y(x, y)) dx dy$.
8. Понятие вариационной производной функционала в случае простейшей задачи вариационного исчисления (с выводом по методу Эйлера).
9. Определение функционального пространства, линейного нормированного пространства.
10. Определение линейного функционала
11. Определение и доказательство единственности первой вариации $\delta J[h]$ (первого дифференциала) функционала $J[y]$.
12. Квадратичные функционалы: определение, примеры. Понятие второй вариации $\delta^2 J[h]$ функционала $J[y]$.
13. Теорема о необходимых условиях экстремума функционала $J[y]$.
14. Теорема о достаточных условиях минимума функционала $J[y]$.
15. Формулировка определения вариационной производной в общем случае.

16. Общее выражение для приращения ΔJ функционала в окрестности точки x .

17. Необходимые условия экстремума функционала $J = \int_a^b F(x, y_i, y'_i) dx$

18. Изопериметрическая задача. Необходимые условия экстремума классического функционала

Тема 2. Краевые задачи.

1. Напишите общий вид линейного дифференциального уравнения второго порядка.
2. Напишите общий вид уравнения колебаний.
3. Что называется струной? Выведите уравнение колебаний струны.
4. Что называется стержнем? Выведите уравнение продольных колебаний стержня.
5. Напишите уравнение поперечных колебаний стержня. Приведите примеры граничных условий.
6. Что называется мембраной? Выведите уравнение поперечных колебаний мембраны.
7. Напишите уравнение поперечных колебаний тонкой пластинки. Приведите примеры граничных условий.
8. Сформулируйте задачу о равновесии мембраны.
9. Сформулируйте задачу об установившихся синусоидальных колебаниях мембраны.
10. Выведите телеграфное уравнение.
11. Напишите трехмерное волновое уравнение. Какие дополнительные условия ставятся при решении волнового уравнения?
12. Напишите общий вид уравнения диффузии. Выведите уравнение диффузии.
13. Выведите уравнение теплопроводности.
14. Напишите общий вид стационарного уравнения.
15. Выведите уравнение электростатики.
16. Выведите уравнение гидродинамики.
17. Сформулируйте задачу об обтекании твердого тела потоком жидкости.
18. Сформулируйте краевые задачи для уравнения теплопроводности.
19. Сформулируйте краевые задачи для одномерного волнового уравнения на примерах поперечных колебаний струны и продольных колебаний стержня.
20. Напишите уравнение Лапласа и уравнение Пуассона. Сформулируйте основные краевые задачи для этих уравнений.
21. К какому типу уравнений относится уравнение Лапласа? Пуассона?

22. Напишите уравнение Гельмгольца. Какие процессы описывает это уравнение?
23. К какому типу уравнений относится уравнение Гельмгольца?
24. Какое уравнение называется уравнением гиперболического типа? Приведите примеры.
25. Какие физические процессы описывает гиперболическое уравнение?
26. Какое уравнение называется уравнением параболического типа? Приведите примеры.
27. Какие физические процессы описывает параболическое уравнение?
28. Какое уравнение называется уравнением эллиптического типа? Приведите примеры.
29. Какие физические процессы описывает эллиптическое уравнение?
30. Запишите характеристическое уравнение. Что называется характеристикой дифференциального уравнения?
31. Какие характеристики имеет одномерное волновое уравнение?
32. Какие характеристики имеет двухмерное уравнение Лапласа?
33. Напишите каноническую форму уравнения гиперболического типа.
34. Напишите каноническую форму уравнения параболического типа.
35. Напишите каноническую форму уравнения эллиптического типа.
36. Дайте понятие об общем интеграле уравнения в частных производных. Приведите примеры.
37. Дайте физическое истолкование общего решения уравнения колебаний струны.
38. Выведите формулу Даламбера решения задачи Коши для волнового уравнения.
39. Расскажите о корректности постановки задач математической физики.
40. Что такое начальные и граничные условия? С чем связана необходимость в постановке дополнительных условий? Приведите примеры.
41. Что называется задачей Коши? Для какого типа уравнений ставится задача Коши? Приведите примеры.
42. Что называется краевой задачей? Для какого типа уравнений ставится краевая задача? Приведите примеры.
43. Что называется смешанной задачей? Для какого типа уравнений ставится смешанная задача? Приведите примеры.
44. Докажите единственность решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона.
45. Докажите единственность решения задачи Неймана для уравнения Пуассона. В чем особенность решения этой задачи?

46. Докажите единственность решения третьей краевой задачи для уравнения Пуассона.
47. Что можно сказать о единственности решения краевых задач, связанных с уравнением Гельмгольца?
48. Докажите единственность решения задачи для уравнения теплопроводности.
49. Докажите единственность решения задачи о колебаниях струны.
50. Дайте общее решение волнового уравнения в сферических координатах в случае радиальных колебаний. Каково физическое истолкование этого решения?

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству «фронтальный и индивидуальный опрос»

Шкала оценивания	Критерий оценивания
отлично (5)	Студент глубоко и в полном объёме владеет программным материалом. Грамотно, исчерпывающе и логично его излагает в устной или письменной форме. При этом знает рекомендованную литературу, проявляет творческий подход в ответах на вопросы и правильно обосновывает принятые решения, хорошо владеет умениями и навыками при выполнении практических задач.
хорошо (4)	Студент знает программный материал, грамотно и по сути излагает его в устной или письменной форме, допуская незначительные неточности в утверждениях, трактовках, определениях и категориях или незначительное количество ошибок. При этом владеет необходимыми умениями и навыками при выполнении практических задач.
удовлетворительно (3)	Студент знает только основной программный материал, допускает неточности, недостаточно чёткие формулировки, непоследовательность в ответах, излагаемых в устной или письменной форме. При этом недостаточно владеет умениями и навыками при выполнении практических задач. Допускает до 30% ошибок в излагаемых ответах.
неудовлетворительно (2)	Студент не знает значительной части программного материала. При этом допускает принципиальные ошибки в доказательствах, в трактовке понятий и категорий, проявляет низкую культуру знаний, не владеет основными умениями и навыками при выполнении практических задач. Студент отказывается от ответов на дополнительные вопросы

Контрольные работы:

Типовые варианты контрольных работ

Вариант № 1

1. Задача об экстремуме классических функционалов на классе кривых, концы которых скользят по двум фиксированным вертикальным прямым. Необходимые условия экстремума. Случай полужакопленных концов.
2. Найти кратчайшее расстояние от точки $A(1,0)$ до эллипса
$$4x^2 + 9y^2 = 36.$$

Вариант № 2

1. Простейшая задача вариационного исчисления. Необходимые условия слабого и сильного экстремума. Уравнение Эйлера. Теорема об условиях гладкости экстремалей (формулировка).
2. Найти кратчайшее расстояние от точки $A(2,0,5)$ до поверхности
$$z = x^2 + y^2.$$

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству «контрольная работа»

Шкала оценивания	Критерий оценивания
5	Контрольная работа выполнена на высоком уровне (правильные ответы даны на 90-100% вопросов/задач)
4	Контрольная работа выполнена на среднем уровне (правильные ответы даны на 75-89% вопросов/задач)
3	Контрольная работа выполнена на низком уровне (правильные ответы даны на 50-74% вопросов/задач)
2	Контрольная работа выполнена на неудовлетворительном уровне (правильные ответы даны менее чем на 50%)

Варианты индивидуальных заданий:

Типовые варианты индивидуальных заданий

Вариант № 1

1.	Найти экстремаль функционала:	$J[y] = \int_{-1}^0 (12xy - y'^2) dx; \quad y(-1) = 1, y(0) = 0.$
----	-------------------------------	---

2.	Найти экстремаль функционала:	$J[y] = \int_0^1 (y'^2 - y^2 - y) e^{2x} dx; \quad y(0) = 0, y(1) = e^{-1}.$
3.	Найти экстремаль функционала:	$J[y] = \int_0^{\pi/4} (y'^2 - y^2) dx; \quad y(0) = 1, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
4.	Найти экстремаль функционала:	$J[y] = \int_0^1 (2e^y - y^2) dx; \quad y(0) = 1, y(1) = e.$
5.	Найти кратчайшее расстояние от точки $A(1,0)$ до эллипса $4x^2 + 9y^2 = 36$.	

Решить дифференциальное уравнение методами: а) Рунге; б) Бунд-Галеркина:

		а)	б)
1.	$y'' - y + x = 0$	$y(0) = 1$ $y'(1) = 0$	$y(0) = y(1) = 0$

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству «индивидуальные задания»

Шкала оценивания	Критерий оценивания
Зачтено	Правильно решены 90-100% заданий
Не зачтено	Правильно решены менее 90% заданий

Оценочные средства для промежуточной аттестации (зачет)

Вопросы к зачету

1. Изопериметрическая задача. Необходимые условия экстремума классического функционала с дополнительными условиями типа функционала $\int_a^b G(x, y, y') dx = L$, которым должен удовлетворять класс допустимых кривых.
2. Необходимые условия экстремума простейшего функционала $J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$ на кривых, заданных в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$; тождество, связывающее между собой полученные уравнения Эйлера.
3. Необходимые условия экстремума функционала $J = \int_a^b F(x, y_i, y_i') dx$, зависящего от n функций $y_i(x)$ одного переменного ($i = 1, 2, \dots, n$), где функции y_i удовлетворяют граничным условиям $y_i(a) = A$, $y_i(b) = B$, ($i = 1, 2, \dots, n$).
4. Формулировка определения вариационной производной в общем случае. Понятие вариации функционала $J[y]$ в точке $x = x_0$ для кривой $y = y(x)$; общее выражение для приращения ΔJ функционала в окрестности точки $x = x_0$; условие инвариантности уравнения Эйлера
5. Понятие вариационной производной функционала в случае простейшей задачи вариационного исчисления (с выводом по методу Эйлера).
6. Необходимые условия экстремума функционалов, зависящих от функции нескольких переменных (рассмотреть случай двух переменных, т.е. функционалы типа $J[z] = \iint_G F(x, y, z(x, y), z_x(x, y), z_y(x, y)) dx dy$).
7. Уравнения Эйлера для некоторых частных случаев классических функционалов и, связанные с ними, первые интегралы
8. Теорема о достаточных условиях минимума функционала $J[y]$ в произвольном нормированном пространстве.
9. Квадратичные функционалы: определение, примеры. Понятие второй вариации $\delta^2 J[h]$ функционала $J[y]$ и доказательство её единственности. Теорема о необходимых условиях экстремума функционала $J[y]$.
10. Определение и доказательство единственности первой вариации $\delta J[h]$ (первого дифференциала) функционала $J[y]$, - если она существует. Теорема о необходимых условиях экстремума функционала.

11. Приращение функционала $\Delta J[h] = J[y+h] - J[y]$ в произвольном нормированном пространстве; определение экстремума (минимума - максимума); понятие слабого и сильного экстремума; их сравнительный анализ.
12. Определение линейного функционала в произвольном нормированном пространстве и лемма 3 для функционала $\int_a^b [a(x)h(x) + a(x)h'(x)]dx$.
13. Определение линейного функционала в произвольном нормированном пространстве и лемма 2 для функционала $\int_a^b a(x)h'(x)dx$.
14. Определение линейного функционала в произвольном нормированном пространстве и лемма 1 для функционала $\int_a^b a(x)h(x)dx$.
15. Функционал в произвольном нормированном пространстве: определение, понятие непрерывности; пример функционала, непрерывного по норме пространства D_1 и не являющегося непрерывным по норме пространства C .
16. Сходимость по норме в линейных нормированных пространствах. Основные свойства.
17. Определение функционального пространства, линейного нормированного пространства. Примеры.

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству «промежуточный контроль» (зачёт)

Характеристика знания предмета и ответов	Зачеты
Студент глубоко и в полном объёме владеет программным материалом. Грамотно, исчерпывающе и логично его излагает в устной или письменной форме. При этом знает рекомендованную литературу, проявляет творческий подход в ответах на вопросы и правильно обосновывает принятые решения, хорошо владеет умениями и навыками при выполнении практических задач.	зачтено
Студент знает программный материал, грамотно и по сути излагает его в устной или письменной форме, допуская незначительные неточности в утверждениях, трактовках, определениях и категориях или незначительное количество ошибок. При этом владеет необходимыми умениями и навыками при выполнении практических задач.	
Студент знает только основной программный материал, допускает неточности, недостаточно чёткие формулировки, непоследовательность в ответах, излагаемых в устной или письменной форме. При этом недостаточно владеет умениями и навыками при выполнении практических задач. Допускает до 30% ошибок в излагаемых ответах.	
Студент не знает значительной части программного материала. При этом допускает принципиальные ошибки в доказательствах, в трактовке понятий и категорий, проявляет низкую культуру знаний, не владеет основными умениями и навыками при выполнении практических задач. Студент отказывается от ответов на дополнительные вопросы.	не зачтено

Лист изменений и дополнений

№ п/п	Виды дополнений и изменений	Дата и номер протокола заседания кафедры (кафедр), на котором были рассмотрены и одобрены изменения и дополнения	Подпись (с расшифровкой) заведующего кафедрой (заведующих кафедрами)